第六章　地球椭球与椭球计算理论

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

本章提要

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

本章讲述地球椭球与参考椭球的概念，进而介绍椭球的基本几何参数，基本坐标系及其相互关系。同时，讲述椭球面同地面之间的关系，如何将地面观测元素（水平方向及斜距等）归算至椭球面上。在对本章的学习中，要建立起空间的概念，只有建立了地球椭球的这些基本空间概念后，才能更好地学习控制测量的内业数据处理等相关知识。

[知识点及学习要求]

1. 地球椭球的定义及其几何意义；
2. 常用测量坐标系统的建立及其在控制测量中的应用；
3. 各种测量坐标系统之间的相互转换；
4. 椭球面上几种曲率、弧长、大地线的计算；
5. 地面测量值（水平方向和边长）归算到椭球面的方法。

*[难点]*在对本章的学习中，有大量的公式推导与应用。
各种常用测量坐标系统的建立与相互转换；
几种常用的椭球计算公式；
地面观测值归算到椭球面的方法与计算。

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

返回本章首页

6.1 地球椭球的基本几何参数及其相互关系

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

1. 地球椭球的基本几何参数

地球椭球：在控制测量中，用来代表地球的椭球，它是地球的数学模型。

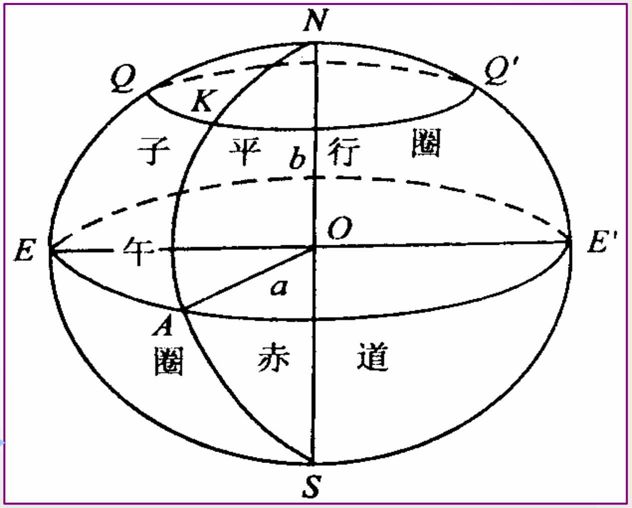
参考椭球：具有一定几何参数、定位及定向的用以代表某一地区大地水准面的地球椭球。地面上一切观测元素都应归算到参考椭球面上，并在这个面上进行计算。参考椭球面是大地测量计算的基准面，同时又是研究地球形状和地图投影的参考面。

地球椭球的几何定义：O是椭球中心，NS为旋转轴，a为长半轴，b为短半轴。

子午圈：包含旋转轴的平面与椭球面相截所得的椭圆。

赤道：通过椭球中心的平行圈

地球椭球



地球椭球的五个基本几何参数:

椭圆的长半轴 a

椭圆的短半轴 b

椭圆的扁率 $\alpha = \dfrac{a-b}{a}$

椭圆的第一偏心率 $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

椭圆的第二偏心率 $e' = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$

其中 a、b 称为长度元素；扁率 α 反映了椭球体的扁平程度。偏心率 e 和 e' 是子午椭圆的焦点离开中心的距离与椭圆半径之比，它们也反映椭球体的扁平程度，偏心率愈大，椭球愈扁。

两个常用的辅助函数，W 第一基本纬度函数，V 第二基本纬度函数:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

我国建立1954年北京坐标系应用的是克拉索夫斯基椭球；建立1980年国家大地坐标系应用的是1975年国际椭球；而全球定位系统(GPS)应用的是WGS-84系椭球参数。

几种常见的椭球体参数值

	克拉索夫斯基椭球体	1975年国际椭球体	WGS-84椭球体
a	6378245.0000000000(m)	6378140.000000000（m）	6378137.0000000000 (m)
b	6356863.0187730473(m)	6356755.288157528（m）	6356752.3142（m）
c	6399698.9017827110(m)	6399596.6519880105（m）	6399593.6258（m）
α	1 / 298.3	1 / 298.257	1/298.257 223 563
e^2	0.006 693 421 622 966	0.006 694 384 999 588	0.006 694 379 901 3
e'^2	0.006 738 525 414 683	0.006 739 501 819 473	0.006 739 496 742 27

2. 地球椭球参数间的相互关系

其他元素之间的关系式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&a=b\sqrt{1+e'^2},\quad b=a\sqrt{1-e^2}\\
&c=a\sqrt{1+e'^2},\quad a=c\sqrt{1-e^2}\\
&e'=e\sqrt{1+e'^2},\quad e=e'\sqrt{1-e^2}\\
&V=W\sqrt{1+e'^2},\quad W=V\sqrt{1-e^2}\\
&e^2=2\alpha-\alpha^2\approx 2\alpha
\end{aligned}\right\}
$$

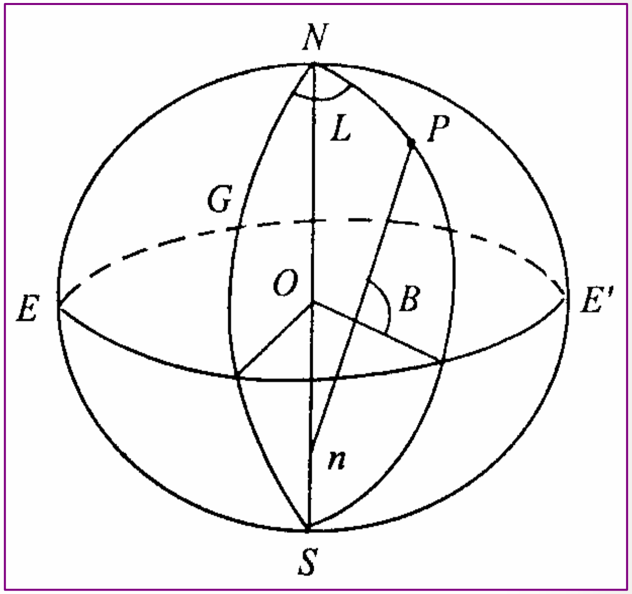
$$
\left.\begin{aligned}
&W=\sqrt{1-e^2}\cdot V=\left(\frac{b}{a}\right)\cdot V\\
&V=\sqrt{1+e'^2}\cdot W=\left(\frac{a}{b}\right)\cdot W\\
&W^2=1-e^2\sin^2 B=(1-e^2)V^2\\
&V^2=1+\eta^2=(1+e'^2)W^2
\end{aligned}\right\}
$$

式中，W 第一基本纬度函数，V 第二基本纬度函数。

6.2 椭球面上的常用坐标系及其相互关系

1．大地坐标系

p 点的子午面NPS 与起始子午面NGS 所构成的二面角L，叫做p 点的大地经度，由起始子午面起算，向东为正，叫东经（0° ~180° ），向西为负，叫西经（0° ~180° ）。P 点的法线 P_n 与赤道面的夹角B，叫做P点的大地纬度。由赤道面起算，向北为正，叫北纬（0° ~90° ）；向南为负，叫南纬(0° ~90°)。



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

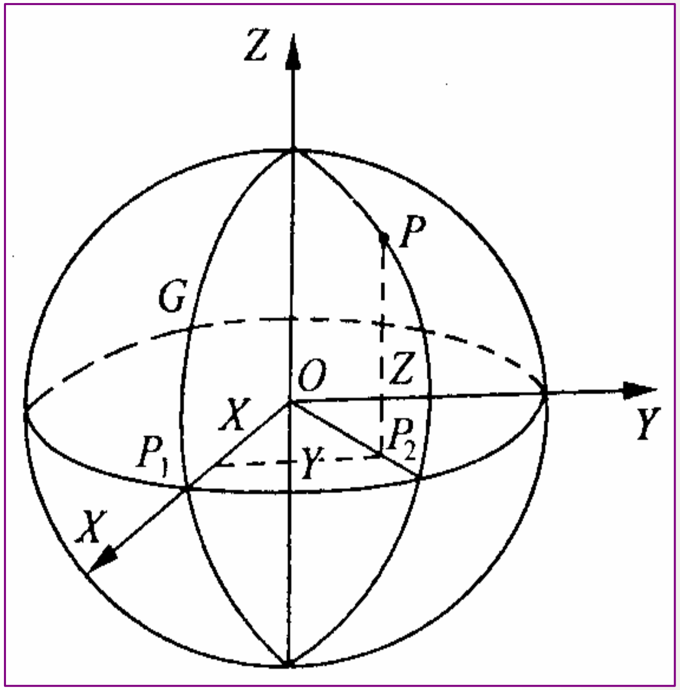
大地坐标系是用大地经度*L*、大地纬度*B*和大地高*H*表示地面点位的。过地面点*P*的子午面与起始子午面间的夹角叫*P*点的大地经度。由起始子午面起算，向东为正，叫东经（0°-180°），向西为负，叫西经（0°-180°）。过P点的椭球法线与赤道面的夹角叫*P*点的大地纬度。由赤道面起算，向北为正，叫北纬（0-90°），向南为负，叫南纬（0°-90°）。从地面点*P*沿椭球法线到椭球面的距离叫大地高。大地坐标坐标系中，点的位置用,表示。如果点不在椭球面上，表示点的位置除,外，还要附加另一参数——大地高，它同正常高及正高有如下关系

$$\left.\begin{aligned} H &= H_{正常} + \zeta(高程异常) \\ H &= H_{正} + N(大地水准面差距) \end{aligned}\right\}$$

2. 空间直角坐标系

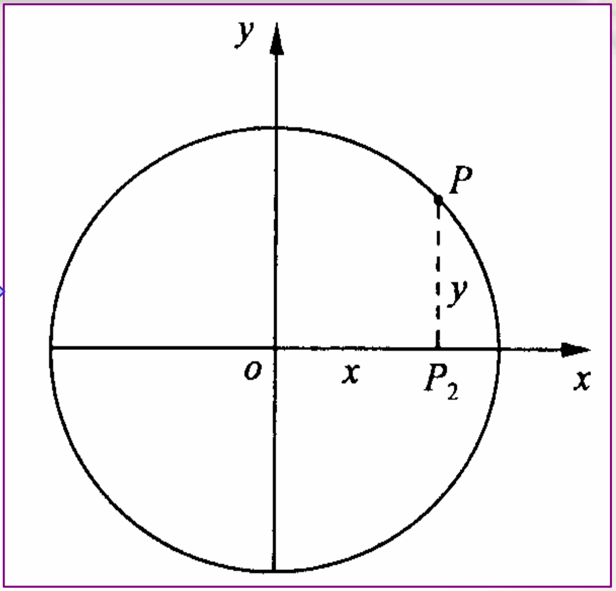
以椭球体中心O为原点，起始子午面与赤道面交线x为轴，在赤道面上与X轴正交的方向为Y轴，椭球体的旋转轴为Z轴，构成右手坐标系$O—XYZ$，在该坐标系中，p点的位置用X,Y,Z表示。

地球空间直角坐标系的坐标原点位于地球质心（地心坐标系）或参考椭球中心（参心坐标系），Z轴指向地球北极，x轴指向起始子午面与地球赤道的交点，y轴垂直于XOZ面并构成右手坐标系。



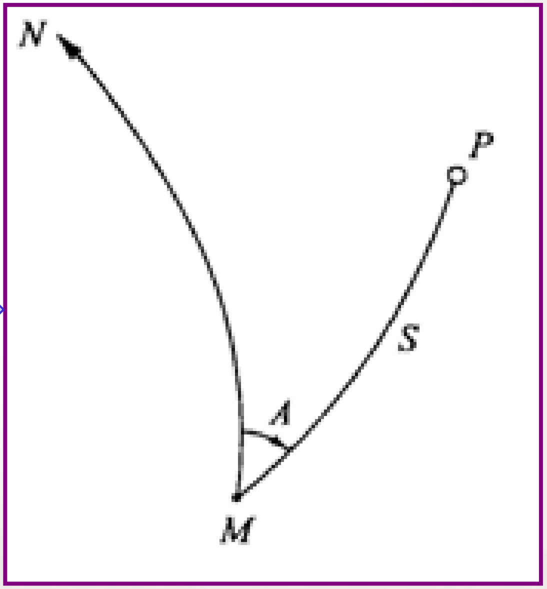
3．子午面直角坐标系

设点 p 的大地经度L为，在过p点的子午面上，以子午圈椭圆中心为原点，建立x,y平面直角坐标系。在该坐标系中，p 点的位置用L,x,y 表示。



4．大地极坐标系

M 为椭球体面上任意一点，MN 为过M 点的子午线，S 为连结的大地线长，A 为大地线在M 点的方位角。以M 为极点，MN 为极轴，S 为极半径，A为极角，这样就构成大地极坐标系。在该坐标系中p 点的位置用S,A 表示。



椭球面上点的极坐标（S,A）与大地坐标(L,B）可以互相换算，这种换算叫做大地主题解算。

5. 各坐标系间的关系

椭球面上的点位可在各种坐标系中表示，由于所用坐标系不同，表现出来的坐标值也不同。

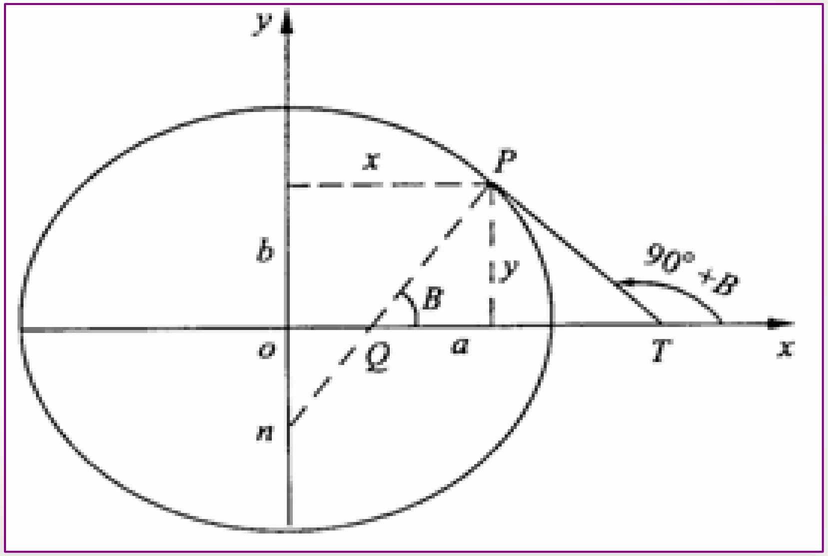
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

1）子午面直角坐标系同大地坐标系的关系

过p点作法线P_n，它与x轴之夹角为B，过点作子午圈的切线TP，它与x轴的夹角为（90°+B）。子午面直角坐标x,y同大地纬度B的关系式如下:

$$x=\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}=\frac{a\cos B}{W}$$

$$y=\frac{a(1-e^2)\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}=\frac{a}{W}(1-e^2)\sin B=\frac{b\sin B}{V}$$



2）空间直角坐标系同子午面直角坐标系的关系

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

空间直角坐标系中P_2P的相当于子午平面直角坐标系中的y，前者的OP_2相当于后者的，并且二者的经度L相同。

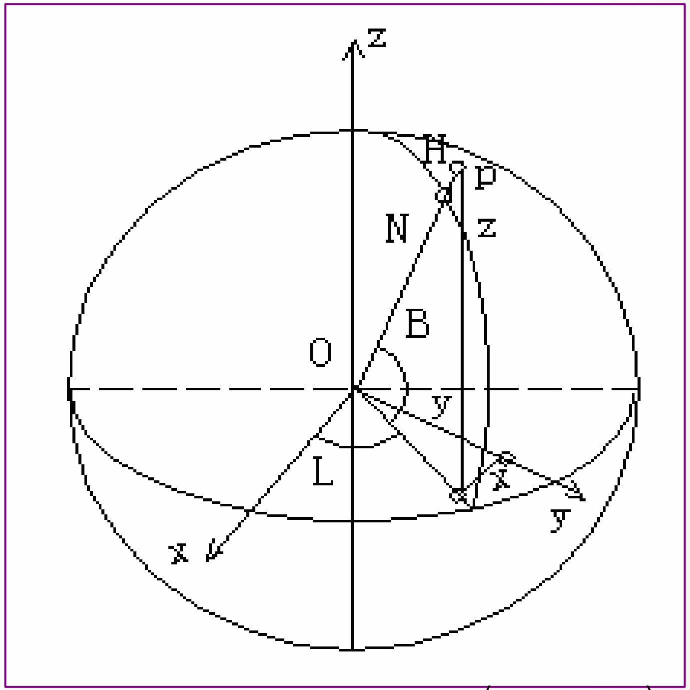
$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos L \\ Y &= x\sin L \\ Z &= y \end{aligned}\right\}$$

3）空间直角坐标系同大地坐标系的关系

同一地面点在地球空间直角坐标系中的坐标和在大地坐标系中的坐标可用如下两组公式转换

$$\left.\begin{aligned} x &= (N+H)\cos B\cos L \\ y &= (N+H)\cos B\sin L \\ z &= [N(1-e^2)+H]\sin B \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \arctan\frac{y}{x} \\ B &= \arctan\frac{z+Ne^2\sin B}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ H &= \frac{z}{\sin B}-N(1-e^2) \end{aligned}\right\}$$



式中：e——子午椭圆第一偏心率，可由长短半径按式 $e^2=(a^2-b^2)/a^2$ 算得。

N——法线长度，可由式 $N=a/\sqrt{1-e^2\sin^2 B}$ 算得。

返回本章首页

6.3 几种主要的椭球公式

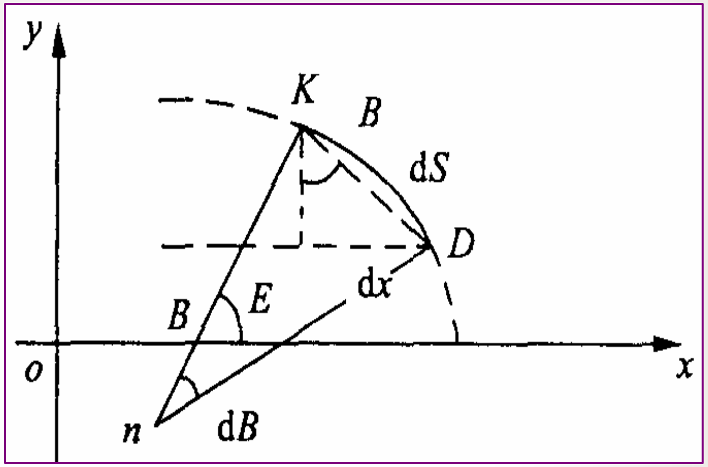
过椭球面上任意一点可作一条垂直于椭球面的法线，包含这条法线的平面叫做法截面，法截面同椭球面交线叫法截线（或法截弧）。包含椭球面一点的法线，可作无数多个法截面，相应有无数多个法截线。椭球面上的法截线曲率半径不同于球面上的法截线曲率半径都等于圆球的半径，而是不同方向的法截弧的曲率半径都不相同。

1. 子午圈曲率半径

子午椭圆的一部分上取一微分弧长$DK=ds$，相应地有坐标增量dx，点n是微分弧 dS 的曲率中心，于是线段Dn及Kn便是子午圈曲率半径 M。

任意平面曲线的曲率半径的定义公式为:

$$M = \frac{dS}{dB}$$



子午圈曲率半径公式为:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$$

$$M = \frac{c}{V^3} \quad 或 \quad M = \frac{N}{V^2}$$

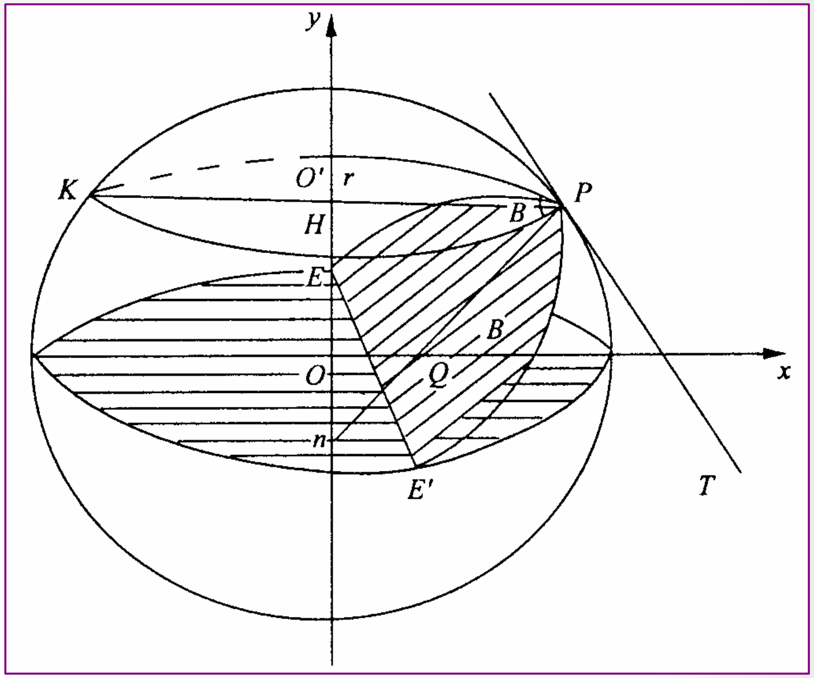
与纬度有关. 它随的增大而增大，变化规律如下表所示:

B	M	说　明
$B=0^\circ$	$M_0 = a(1-e^2) = \frac{c}{\sqrt{(1+e'^2)^3}}$	在赤道上，小于赤道半径
$0^\circ < B < 90^\circ$	$a(1-e^2) < M < c$	此间随纬度的增大而增大
$B=90^\circ$	$M_{90} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = c$	在极点上，等于极点曲率半径

2. 卯酉圈曲率半径

过椭球面上一点的法线，可作无限个法截面，其中一个与该点子午面相垂直的法截面同椭球面相截形成的闭合的圈称为卯酉圈。在图中 PEE' 即为过 P 点的卯酉圈。卯酉圈的曲率半径用 N 表示。

为了推导 N 的表达计算式，过 P 点作以为 O' 中心的平行圈 PHK 的切线 PT，该切线位于垂直于子午面的平行圈平面内。因卯酉圈也垂直于子午面，故 PT 也是卯酉圈在 P 点处的切线。即 PT 垂直于 Pn。所以 PT 是平行圈 PHK 及卯酉圈 PEE' 在 P 点处的公切线。



卯酉圈曲率半径可用下列两式表示:

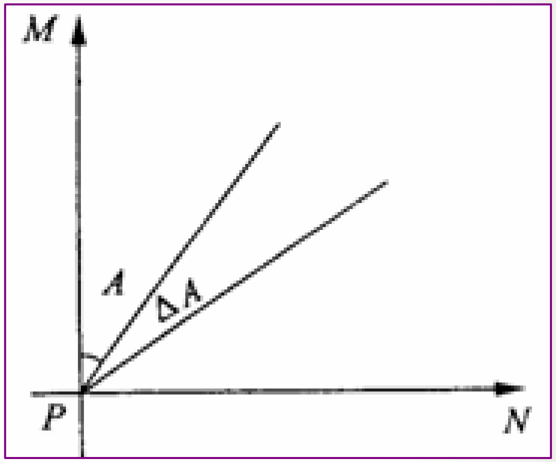
$$N = \frac{a}{W}$$

$$N = \frac{c}{V}$$

3. 任意法截弧的曲率半径

子午法截弧是南北方向，其方位角为0°或180°。卯酉法截弧是东西方向，其方位角为90°或270°。现在来讨论方位角为A的任意法截弧的曲率半径R_A的计算公式。

任意方向A的法截弧的曲率半径的计算公式如下：



$$R_A=\frac{N}{1+\eta^2\cos^2A}=\frac{N}{1+e'^2\cos^2B\cos^2A}$$

4. 平均曲率半径

在实际际工程应用中，根据测量工作的精度要求，在一定范围内，把椭球面当成具有适当半径的球面。取过地面某点的所有方向R_A的平均值来作为这个球体的半径是合适的。这个球面的半径——平均曲率半径R:

$$R=\sqrt{MN} \quad \text{或} \quad R=\frac{b}{W^2}=\frac{c}{V^2}=\frac{N}{V}=\frac{a}{W^2}\sqrt{(1-e^2)}$$

因此，椭球面上任意一点的平均曲率半径R等于该点子午圈曲率半径M和卯酉圈曲率半径N的几何平均值。

5. 子午线弧长计算公式

子午椭圆的一半，它的端点与极点相重合；而赤道又把子午线分成对称的两部分。

如下图所示，取子午线上某微分弧 $PP'=dx$，令 P点纬度为 B，P'点纬度为 $B+dB$，P点的子午圈曲率半径为M，于是有：

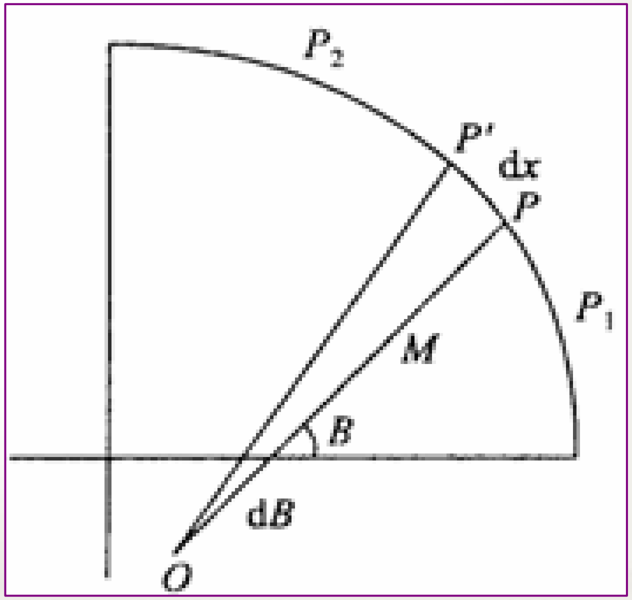
$$dx = MdB$$

从赤道开始到任意纬度 B的平行圈之间的弧长可由下列积分求出：

$$X = \int_0^B MdB$$

式中M可用下式表达：

$$M = a_0 - a_2\cos 2B + a_4\cos 4B - a_6\cos 6B + a_8\cos 8B$$



其中：

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= m_0 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8} m_4 + \frac{5}{16} m_6 + \frac{35}{128} m_8 + \cdots \\
a_2 &= \frac{m_2}{2} + \frac{m_4}{2} + \frac{15}{32} m_6 + \frac{7}{16} m_8 \\
a_4 &= \frac{m_4}{8} + \frac{3}{16} m_6 + \frac{7}{32} m_8 \\
a_6 &= \frac{m_6}{32} + \frac{m_8}{16} \\
a_8 &= \frac{m_8}{128}
\end{aligned}\right\}$$

经积分，进行整理后得子午线弧长计算式：

$$X = a_0 B - \frac{a_2}{2} \sin 2B + \frac{a_4}{4} \sin 4B - \frac{a_6}{6} \sin 6B + \frac{a_8}{8} \sin 8B$$

为求子午线上两个纬度 B_1及B_1间的弧长，只需按上式分别算出相应的 X_1 及 X_1，而后取差：$\Delta X = X_2 - X_1$，该 ΔX 即为所求的弧长。

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

克拉索夫斯基椭球子午线弧长计算公式:

$$X = 111134.861B^{\circ} - 16036.480\sin 2B + 16.828\sin 4B - 0.022\sin 6B$$

$$X = 111134.861B^{\circ} - 32005.780\sin B\cos B - 133.929\sin^{3} B\cos B - 0.697\sin^{5} B\cos B$$

1975年国际椭球子午线弧长计算公式:

$$X = 111133.005B^{\circ} - 16038.528\sin 2B + 16.833\sin 4B - 0.022\sin 6B$$

$$X = 111133.005B^{\circ} - 32009.858\sin B\cos B - 133.960\sin^{3} B\cos B - 0.698\sin^{5} B\cos B$$

6. 底点纬度计算

在高斯投影反算时，已知高斯平面直角坐标（X，Y）反求其大地坐标（L，B）。首先X当作中央子午线上弧长，反求其纬度，此时的纬度称为底点纬度或垂直纬度。计算底点纬度的公式可以采用迭代解法和直接解法。

（1）迭代法

在克拉索夫斯基椭球上计算时，迭代开始时设

$$B_f^1 = X / 111134.8611$$

以后每次迭代按下式计算:

$$B_f^{i+1} = (X - F(B_f^i)) / 111134.8611$$

$$F(B_f^i) = -16036.4803 \sin 2B_f^i + 16.8281 \sin 4B_f^i - 0.0220 \sin 6B_f^i$$

重复迭代直至 $B_f^{i+1} - B_f^i < \varepsilon$ 为止。

在1975年国际椭球上计算时，也有类似公式。

（2）直接解法

1975年国际椭球:

$$\beta = X / 6367452.133$$

$$B_f = B + \{50228976 + [293697 + (2383 + 22\cos^2\beta)\cos^2\beta]\cos^2\beta\}$$

$$\times 10^{-10} \times \sin\beta\cos\beta$$

克拉索夫斯基椭球:

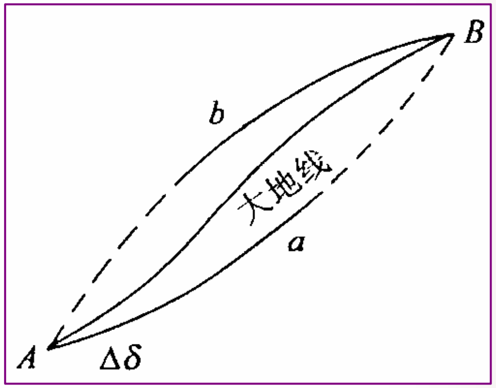
$$\beta = X / 6367588.4969$$

$$B_f = \beta + \{50221746 + [293622 + (2350 + 22\cos^2\beta)\cos^2\beta]\cos^2\beta\}$$

7. 大地线

椭球面上两点间的最短程曲线叫做大地线。在微分几何中，大地线（又称测地线）另有这样的定义："大地线上每点的密切面（无限接近的三个点构成的平面）都包含该点的曲面法线"，亦即"大地线上各点的主法线与该点的曲面法线重合"。因曲面法线互不相交，故大地线是一条空间曲面曲线。

假如在椭球模型表面 A,B 两点之间，画出相对法截线如图所示，然后在 A,B 两点上各插定一个大头针，并紧贴着椭球面在大头针中间拉紧一条细橡皮筋，并设橡皮筋和椭球面之间没有摩擦力，则橡皮筋形成一条曲线，恰好位于相对法截线之间，这就是一条大地线。由于橡皮筋处于拉力之下，所以它实际上是两点间的最短线。



在椭球面上进行测量计算时，应当以两点间的大地线为依据。在地面上测得的方向、距离等，应当归算成相应大地线的方向、距离。

6.4　将地面观测值归算至椭球面

1. 概述

参考椭球面是测量计算的基准面。在野外的各种测量都是在地面上进行，观测的基准线不是各点相应的椭球面的法线，而是各点的垂线，各点的垂线与法线存在着垂线偏差。因此不能直接在地面上处理观测成果，而应将地面观测元素（包括方向和距离等）归算至椭球面。

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

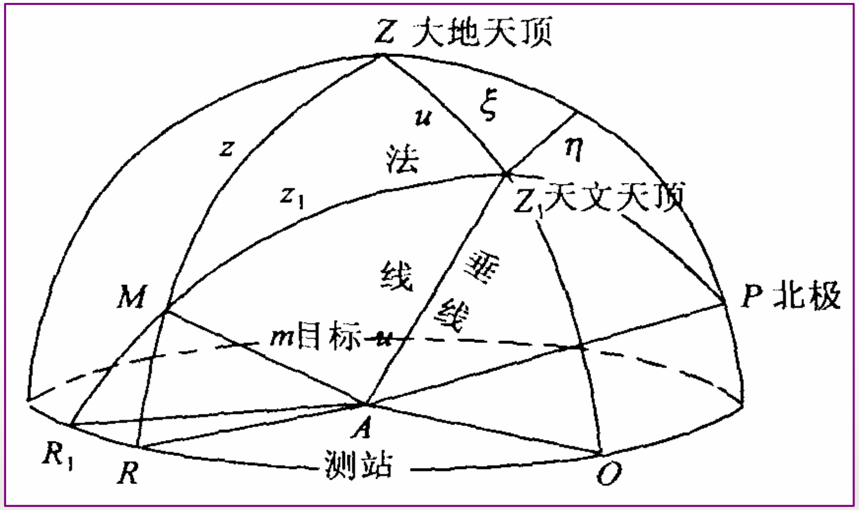
在归算中有两条基本要求：
以椭球面的法线为基准；
将地面观测元素化为椭球面上大地线的相应元素。

2. 将地面观测的水平方向归算至椭球面

1) 垂线偏差改正δ_u

地面上所有水平方向的观测都是以垂线为根据的，而在椭球面上则要求以该点的法线为依据。把以垂线为依据的地面观测的水平方向值归算到以法线为依据的方向值而应加的改正定义为垂线偏差改正，以δ_u表示。

如下图所示，以测站A为中心作出单位半径的辅助球，u 是垂线偏差，它在子午圈和卯酉圈上的分量分别以ξ,η表示，M是地面观测目标m在球面上的投影。



垂线偏差改正的计算公式是:

$$\delta_u'' = -(\xi'' \sin A_m - \eta'' \cos A_m)\cot Z_1$$
$$= -(\xi'' \sin A_m - \eta'' \cos A_m)\tan \alpha_1$$

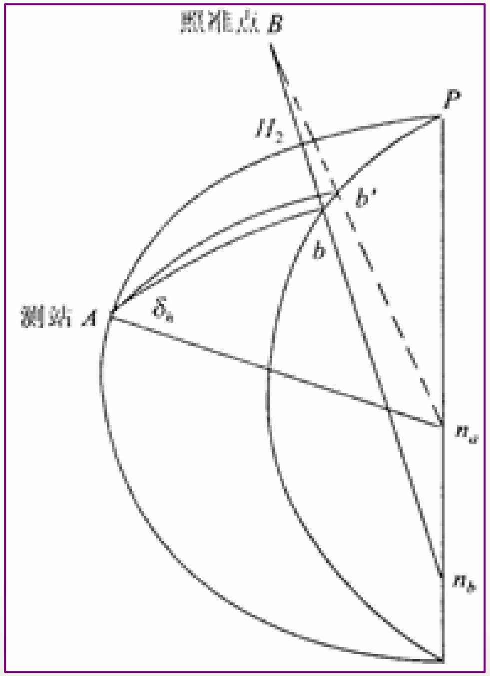
式中：ξ,η 为测站点上的垂线偏差在子午圈及卯酉圈上的分量，它们可在测区的垂线偏差分量图中内插取得; A_m 为测站点至照准点的大地方位角; α_1 为照准点的天顶距; Z_1 为照准点的垂直角。

垂线偏差改正的数值主要与测站点的垂线偏差和观测方向的天顶距（或垂直角）有关。

2） 标高差改正δ_h

标高差改正又称由照准点高度而引起的改正。不在同一子午面或同一平行圈上的两点的法线是不共面的。当进行水平方向观测时，如果照准点高出椭球面某一高度，则照准面就不能通过照准点的法线同椭球面的交点，由此引起的方向偏差的改正叫做标高差改正，以 δ_h 表示。

如右图所示，A为测站点，如果测站点观测值已加垂线偏差改正，则可认为垂线同法线一致。这时测站点在椭球面上或者高出椭球面某一高度，对水平方向是没有影响的。这是因为测站点法线不变，则通过某一照准点只能有一个法截面。



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

设照准点高出椭球面的高程为H_2，An_a和Bn_b分别为A点及B点的法线，B点法线与椭球面的交点为b。因为通常An_a和Bn_b不在同一平面内，所以在A点照准B点得出的法截线是Ab而不是Ab'，因而产生了Ab同Ab'方向的差异。按归算的要求，地面各点都应沿自己法线方向投影到椭球面上，即需要的是Ab方向值而不是Ab'方向值，因此需加入标高差改正数δ_h，以便将Ab'方向改到Ab方向。

标高差改正的计算公式是

$$\delta_h'' = \frac{e^2}{2} H_2 (1)_2 \cos^2 B_2 \sin 2A_1$$

式中：B_2 为照准点大地纬度；A_1 为测站点至照准点的大地方位角；H_2 为照准点高出椭球面的高程，它由三部分组成：

$$H_2 = H_{常} + \zeta + a$$

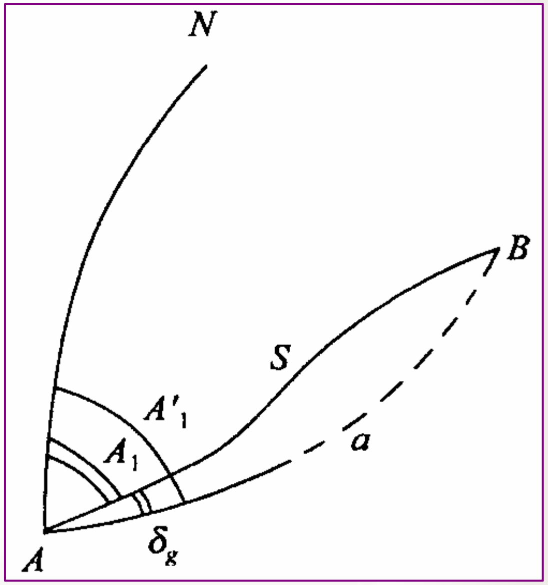
其中 $H_{常}$ 为照准点标石中心的正常高，ζ 为高程异常，a 为照准点的觇标高，$(1)_2 = \rho''/M_2$，B_2 是与照准点纬度，M_2 是相应的子午圈曲率半径。

标高差改正主要与照准点的高程有关。经过此项改正后，便将地面观测的水平方向值归化为椭球面上相应的法截弧方向。

3）截面差改正 δ_g

在椭球面上，纬度不同的两点由于其法线不共面，所以在对向观测时相对法截弧不重合，应当用两点间的大地线代替相对法截弧。这样将法截弧方向化为大地线方向应加的改正叫截面差改正，用 δ_g 表示。

如图所示，AaB 是A至B的法截弧，它在A点处的大地方位角为 A_1' ，ASB 是AB间的大地线，它在A点的大地方位角是 A_1 ，A_1 与 A_1' 之差 δ_g 就是截面差改正 。



截面差改正的计算公式为

$$\delta_g'' = -\frac{e^2}{12\rho''} S^2 (2)_1^2 \cos^2 B_1 \sin 2A_1$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

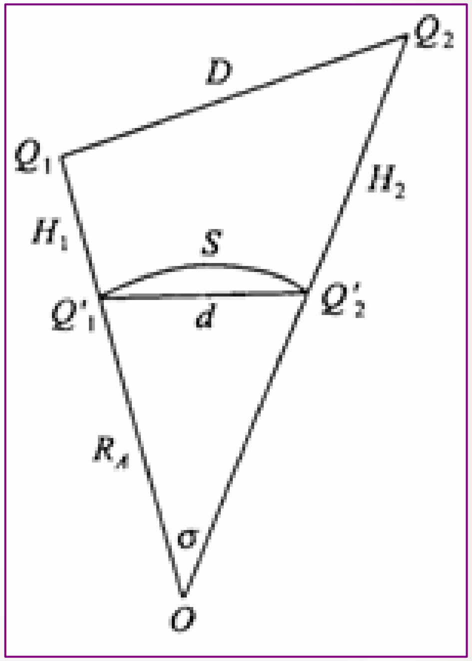
式中S为AB间大地线长度，$(2)_1=\dfrac{\rho''}{N_1}$，$N_1$为测站点纬度$B_1$相对应的卯酉圈曲率半径。现令在一般情况下，一等三角测量应加三差改正，二等三角测量应加垂线偏差改正和标高差改正，而不加截面差改正；三等和四等三角测量可不加三差改正。但当$\xi=\eta>10''$时或者H>2 000m时，则应分别考虑加垂线偏差改正和标高差改正。在特殊情况下，应该根据测区的实际情况作具体分析，然后再做出加还是不加改正的规定。如下表所示：

<table>
<tr><th rowspan="2">三差改正</th><th rowspan="2">主要关系量</th><th colspan="3">是否要加改正</th></tr>
<tr><th>一等</th><th>二等</th><th>三、四等</th></tr>
<tr><td>垂线偏差</td><td>ξ,η</td><td rowspan="3">加</td><td rowspan="2">加</td><td rowspan="2">酌情</td></tr>
<tr><td>标高差</td><td>H</td></tr>
<tr><td>截面差</td><td>S</td><td colspan="2">不加</td></tr>
</table>

3. 电磁波测距边长归算椭球面

电磁波测距仪测得的长度是连接地面两点间的直线斜距，也应将它归算到参考椭球面上。

如图，大地点Q_1和Q_2的大地高分别为H_1和H_2。其间用电磁波测距仪测得的斜距为D，现要求大地点在椭球面上沿法线的投影点 Q_1' 和 Q_2' 间的大地线的长度S。



在工程测量中边长一般都是几公里，最长也不过十几公里，因此，所求的大地线的长度可以认为是半径

$$R_A = \frac{N}{1+e'^2\cos^2 B_1 \cos^2 A_1}$$

相应的圆弧长。

电磁波测距边长归算椭球面上的计算公式为:

$$S = D - \frac{1}{2}\frac{\Delta h^2}{D} - D\frac{H_m}{R_A} + \frac{D^3}{24R_A^2}$$

式中 $H_m = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$

电磁波测距边长归算的几何意义：

（1）计算公式中右端第二项是由于控制点之高差引起的倾斜改正的主项，经过此项改正，测线已变成平距；
（2）第三项是由平均测线高出参考椭球面而引起的投影改正，经此项改正后，测线已变成弦线；
（3）第四项则是由弦长改化为弧长的改正项。

电磁波测距边长归算至椭球面上的计算公式还可用下式表达：

$$S=\sqrt{D^2-\Delta h^2}\left(1-\frac{H_m}{R_A}\right)+\frac{D^3}{24R_A^2}$$

显然第一项即为经高差改正后的平距。

问题

算例见下表，用上述两个公式计算将电磁波测距边长归算至椭球面上。

已知	$B_1=35^\circ$ $A=30^\circ$	$B_2=35^\circ 02'$ $D=3456.789\text{m}$	$H_1=800\text{m}$	$H_2=1000\text{m}$

习　题

1. 试写出椭球的基本元素及其基本关系式。
2. 在控制测量的椭球解算中，常引用下列符号：t 、η 、w 、v ，试问它们之间函数关系的一个基本共同特点是什么？
3. 我国解放后主要采用哪两种参考椭球?其主要参数是什么？
4. 绘图并说明表示椭球面上点位的三种常用坐标系统。
5. 在报纸上经常看到X X号轮船在东经XXX度，北纬X X度遇险一类的报导，试问这是指的什么坐标系，为什么？
6. 写出参考椭球体的五个基本元素及相互间的关系。
7. 什么叫子午圈？什么叫平行圈？
8. 参考椭球体扁率的变化，椭球体的形状发生怎样的变形？
9. 简要说明并图示地面某一点的大地高、正常高以及大地水准面差距的几何意义。
10. 什么是大地测量的基本坐标系？有何优点？
11. 画图表示地心纬度坐标系和归化纬度坐标系，这两种坐标系在大地测量中有何意义？
12. 用公式表示空间直角坐标系和大地坐标系之间的关系。
13. 何为大地纬度、归化纬度、地心纬度？三者间有何关系？

14. 简要叙述M、N、R 三种曲率半径之间的关系。
15. 大地坐标系和天文坐标系各以什么作基准面和基准线?
16. 试推证卯酉圈、子午圈曲率半径的计算公式。
17. $B\neq 0^0$的平行圈是否有可能是法截线? 为什么?
18. 卯酉圈曲率半径N与子午圈曲率半径M何时有最大值? 何时有最小值?
19, 为什么说任意方向法截线曲率半径R_A随A的变化是以90^0为周期的? 这一结论对椭球问题的解算有什么意义?
20. 什么是法线? 什么是法截面? 它们对椭球解算有什么意义?
21. 当椭球元素确定之后，椭球面上任意方向法截线曲率半径的计算值取决于哪两个变量? 为什么?
22. 已知欧拉公式:

$$\frac{1}{R_A}=\frac{1}{M}\cos^2 A+\frac{1}{N}\sin^2 A$$

试由椭球基本元素及公式出发，用两种方法导出计算任意方向法截线曲率半径的公式和平均曲率半径R的公式。

23. 研究平均曲率半径R对椭球解算有何意义? 在我国中纬度地区R与的最大差异是多少? 试将它对距离化算（用R代替）的影响作一定量分析。

24. 在推导计算子午线弧长公式时，为什么要从赤道起算？若欲求纬度*B1*和*B2*间的子午线弧长（$B_1 \neq B_2 \neq 0°$），如何计算？

25. 当子午线弧长不超过45km时，则可将其视为圆弧，试论证其计算精度的可靠性。

26. 何谓椭球面上的相对法截线和大地线？试鉴别下列各线是否为大地线并简要说明理由：

(1)任意方向法截线，　(2)子午圈，　(3)卯酉圈，　(4)平行圈。

27. 试证明椭球面上过任一点*P*(*B*、*L*，$B \neq 0$)的任一方向的法截线只有子午线是大地线，而平行圈为什么不是大地线？若为球面，情况又如何？

28. 研究相对法截线有何意义？画出某方向在不同象限时正反法截线的关系图。

29. 什么叫大地线？为什么可以用大地线代替法截线？大地线具有什么性质？

30. 大地线微分方程表达了什么之间的关系？有何意义？试述其推导思路。

31. 怎样理解克莱洛定理中大地线常数*C*的含义？

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

32. 试述三差改正的几何意义。为什么有时在三角测量工作中可以不考虑三差改正?

33. 三差改正的改正数大小，各与什么有关?

34. 解释下列名词:

大地水准面，参考椭球，大地线，法截线，大地经纬度

35. 已知椭球(a,e^2)面上一点P的空间直角坐标X、Y、Z。试求:

(1) 该点的大地坐标(B、L);

(2) 该点的平行圈半径r，主曲率半径M与N;

(3) 该点上大地方位角为A的方向上的法截弧曲率半径。

36. 在边长大致相等的三角网中，各方向的方向改正值是否也大致相等? 为什么?

37. 什么是拉普拉斯方程式? 在大地测量中有何意义?

38. 为什么说通过比较一点的天文经纬度和大地经纬度，可以求出该点的垂线偏差?试绘图导出垂线偏差的计算公式?

39. 图示垂线偏差对观测天顶距的影响。

40. 试定量分析距离改正公式在何种情况下需用下列或更精密的计算公式:

$$\Delta s = D - s = \left(\frac{y_m^2}{2R^2} + \frac{\Delta y^2}{24R^2} \right) s$$

41. 将地面实测长度归化到国家统一的椭球面上，其改正数应用下式求得:

$$\delta_H = -\frac{H}{R_A} s_H$$

式中H应为边长所在高程面相对于椭球面的高差，而实际作业中通常用什么数值替代？这对δ_H的计算精度是否有影响？为什么？

42. 根据垂直角将导线测量中的斜距化为平距时，有化算至测站高程面以及化算至测站点与照准点平均高程面上两种公式，两公式之间有何差异？试导出其差异的来源。

43. 导出由电磁波测距仪测得的斜距化算为大地线长度的计算公式。

44. 什么是球面角超？为什么应用球面角超可以检核方向改正值计算的正确性？

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

45. 在北纬22° 00′ 地区三角网中有一三角形*ABC*，已知归化到椭球面上的三个内角为*A*=56° 40′ 07.50″ ，*B*=83° 13′ 49.00″ ，*C*=40° 06′ 04.23“。并已知三角形三顶点的近似坐标分别为 $x_A = 2435.28km$ ，$y_A = 250.50km$ ；$x_B = 2411.30km$ ，$y_B = 250.99km$ ；$x_C = 2414.10km$ ，$y_C = 281.38km$ 。试用两种不同方法求出该三角形闭合差（在球面上计算时略去长度改化；注 $B = 22^0 00'$ 处 $\frac{\rho''}{2R^2} = 0.0025$ ）。

46. 什么叫大地主题解算？为什么要研究大地主题解算？其解析意义是什么？

47. 在推导正算公式和反算公式过程中主要运用的是什么数学方法和原理？运用的根据是什么？反算公式中的起什么作用？试根据正反算公式画图说明子午线和平行圈投影至平面后的形状。

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

48. 用电磁波测距仪测得地面倾斜距离为D，已知数据列于中。试求D 归化到椭球面上的大地线长度S。

符号	已知数据	符号	计算数值 (m)
B_1	30° 16′	H_2-H_1	
A_{12}	80° 36′	N_1	
H_1	2780.51m	R_A	
H_2	2373.43m	S	
D	1794.106m		

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

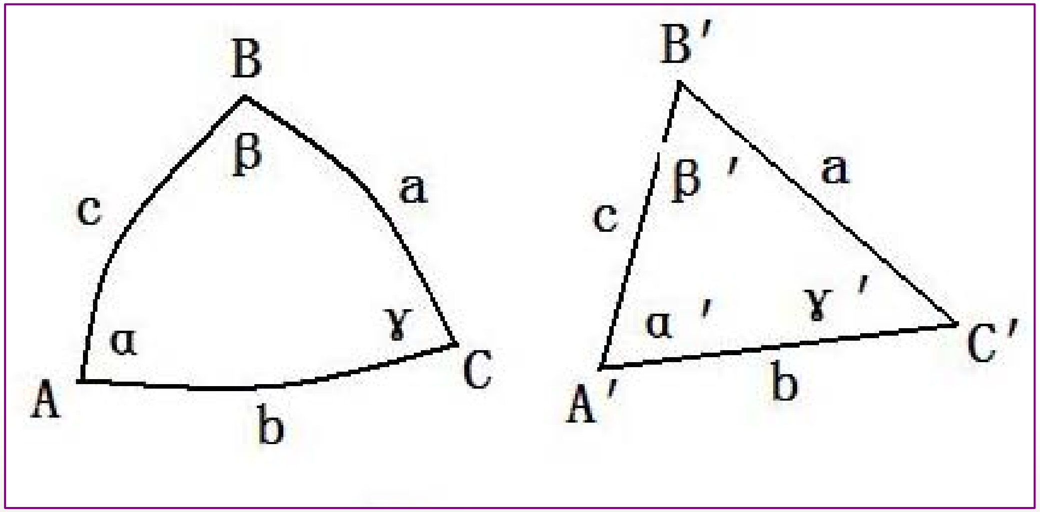
49. 某椭球面三角形 ABC，其平均纬度 $Bm=33°\ 50'$，起算边长 $AC=b=47652.597$m，三角形的三个内角观测值为

$\alpha=70°\ 46'\ 03.49''$

$\beta=65°\ 05'\ 15.01''$

$\gamma=44°\ 08'\ 45.68''$

试解算椭球面三角形 ABC。



附：1. 电磁波测距边归化到椭球面上的计算示例：

计算公式

$$S = D\sqrt{\frac{1-\left(\frac{H_2-H_1}{D}\right)^2}{\left(1+\frac{H_1}{R_A}\right)\left(1+\frac{H_2}{R_A}\right)}}+\frac{D^3}{24R_A^2}$$

式中 D——地面倾斜距离；
S——椭球面大地线长度；
H_1，H_2——大地高；
R_A——沿观测方向的曲率半径。

$$R_A = \frac{N_1}{1+e'^2\cdot\cos^2 B_1\cdot\cos^2 A_{12}}$$

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

已知数值:

D=34884.181m， B_1=30° 33′ ， A_{12}=129° 35′ ， H_1=3930.35m， H_2=3879.54m。

常数值:

a=6378245m e^2=0.00669342 e'^2=0.00673852

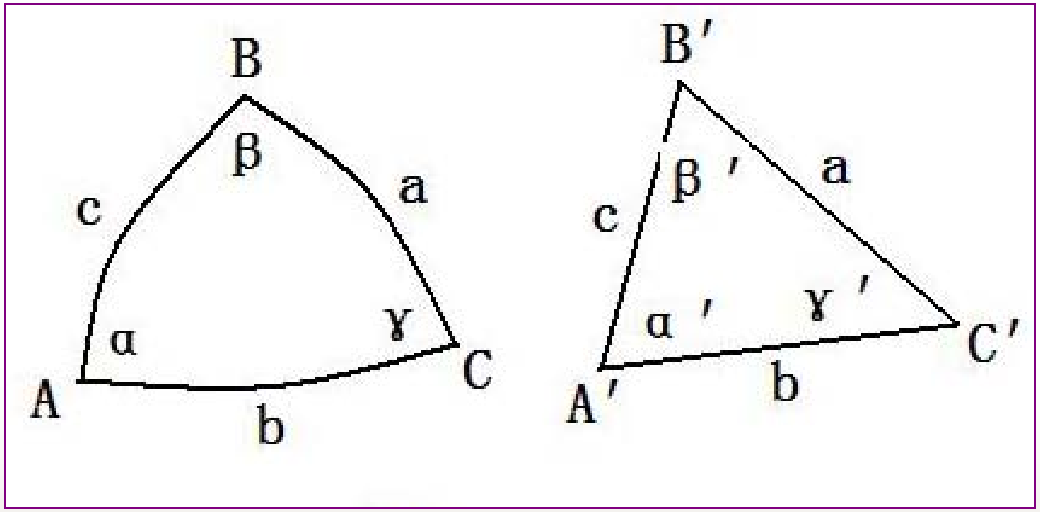
解:

RA=6371440m S=34862.821m

2. 按勒让德尔定理解算球面三角形

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

示例：下图中ABC 为球面三角形，其球面角用α ，β ，γ 表示，边长按长度为单位用a，b，c表示之；$A'B'C'$ 为以球面边长a，b，c为边的平面三角形，其中α'，β'，γ' 称为平面归化角。设平均纬度B_m =34° 50′，起算边长$BC=a$=14862.821m，球面三角形的三个内角观测值α，β，γ 列于下表，试求b、c边长？



计算公式:

$$\alpha' = \alpha_0 - \frac{1}{3}\varepsilon \qquad \beta' = \beta_0 - \frac{1}{3}\varepsilon \qquad \gamma' = \gamma_0 - \frac{1}{3}\varepsilon$$

$$\frac{a}{\sin\alpha'} = \frac{b}{\sin\beta'} = \frac{c}{\sin\gamma'}$$

上式中 α_0、β_0 、γ_0 为平差后的球面角， ε 为球面角超，分别按下列公式计算:

$$\varepsilon = fbc\sin\alpha = fac\sin\beta = fab\sin\gamma$$ （当边长小于90km时）

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{w}{3} \qquad \beta_0 = \beta - \frac{w}{3} \qquad \gamma_0 = \gamma - \frac{w}{3}$$

其中 $f = \frac{\rho''}{2R^2}$； w为三角形闭合差，即

$$w = (\alpha + \beta + \gamma) - (180^0 + \varepsilon'')$$

计算步骤:

➢三角形概算和球面角超的计算

f=0.002541 表a

三角形编号	顶点名称	角度值 (°　′　″)	边　长 (km)	球面角超 ε″
1	*A*	35　54　47	14.863	0.863
	B	69　05　36	23.671	
	C	74　59　35	24.475	
	W	179　59　58		

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

➢椭球面三角形的解算

顶点名称	球面上的角度观测 (° ′ ″)	角度平差改正数 (″)	平差后的球面角值 (° ′ ″)	$-\frac{\varepsilon''}{3}$	平面归化角 (″)	球面边长 (m)	球面角超 ε ″
A	35 54 47.18	+0.647	35 54 47.827	−0.287	47.540	14862.821	
B	69 05 6.31	+0.648	69 05 36.958	−0.288	36.670	23670.787	0.863
C	74 59 35.43	+0.648	74 59 36.078	−0.288	35.790	24474.827	
Σ 闭合差	179 59 58.92 −1.943						

返回本章首页